Über statistische Beziehungen und deren Inversion

Von Dr. *Corrado Gini*
Professor an der Universität Rom

Anlässlich der Messung der Konzentration bot sich mir die Gelegenheit, die *beschreibenden* von den *durchschnittlichen Konzentrationsindizes* [1] zu unterscheiden.

Ein Konzentrationsmass lässt sich aus der Beziehung

$$\frac{N_x}{N_0} = \left(\frac{A_x}{A_0}\right)^\delta$$

ableiten; hierin bezeichnen N_x und N_0 die Zahl der Einkommensbezüger mit Einkommen gleich oder grösser als x bzw. gleich oder grösser als Null, A_x und A_0 die entsprechenden Einkommenssummen und δ jene Zahl, mit welcher der Einkommensanteil der Pflichtigen mit Einkommen grösser als x zufliesst, zu potenzieren ist, um den entsprechenden Pflichtigenanteil zu erhalten.

Wenn δ sich bei verschiedenen Werten von x nicht wesentlich verändert, ist es möglich, auf Grund seines Wertes, die Konzentrationskurve zu beschreiben. In einem solchen Falle stellt dieser Parameter einen «beschreibenden Konzentrationsindex» dar.

Wenn jedoch die δ-Werte bei verschiedenen Werten von x wesentlich voneinander abweichen, kann ein Konzentrationsmass aus deren arithmetischem Mittel oder auch durch Interpolation der Kurve, die die Werte N_x in Funktion der Werte A_x auf Grund der Formel

$$\log N_x = K + \delta \log A_x$$

ausdrückt, gewonnen werden.

Der solchermassen bestimmte Wert für δ stellt einen «durchschnittlichen Konzentrationsindex» dar.

---

[1] Vergleiche die Vorlesungen in Statistik, die seit dem Jahre 1909 an den Universitäten Cagliari, Padua und Rom gehalten und von Studenten, Assistenten und Dozenten in mehreren lithographierten Ausgaben veröffentlicht worden sind. Eine gedruckte Ausgabe wurde in spanischer Sprache herausgegeben; *Curso de Estadistica* — Editorial Labor 1935. (Vgl. bezüglich der beschreibenden und durchschnittlichen Konzentrationsindizes die Seiten 179—180.) Im Druck befindet sich eine neue, nachgeführte und erweiterte Auflage in spanischer Sprache, deren lithographierter italienischer Text — von Dozenten *V. Castellano*, *N. Federici* und *T. Salvemini* besorgt — soeben erschienen ist (Rom, Castellani, 1947; bezüglich der fraglichen Indizes, vgl. Kap. III, S. 73—88).

Der Index δ ist beschreibend für die Verteilung der Globaleinkommen, der Mietwerte, der Arbeitseinkommen; lediglich ein durchschnittlicher Konzentrationsindex wird er jedoch für die Kapitaleinkommen, die Erbschaften, die Vermögen.

Das Konzentrationsverhältnis R, das aus der Fläche zwischen der Kurve von *Lorenz* und der Geraden gleichförmiger Verteilung gezogen werden kann, und das gleich der auf ihren maximalen Wert bezogenen mittleren Differenz ist, stellt einen durchschnittlichen Konzentrationsindex dar.

Die üblichen Variabilitätsmasse (durchschnittliche Abweichung, mittlere quadratische Abweichung, mittlere Differenz) sind durchschnittliche Indizes.

* * *

Ich erachte es als nützlich, die angeführte Unterscheidung verallgemeinernd auf alle statistischen Beziehungen auszudehnen.

Eine *statistische Beziehung* zwischen einer unabhängigen Veränderlichen x und einem Funktionswert y wird *beschreibend* genannt, wenn sie für alle Werte von x gilt (selbstverständlich mit der Annäherung, die man von statistischen Zahlen erwarten kann); sie wird aber als *globale* oder *durchschnittliche* bezeichnet, wenn sie nur für die Gesamtheit der x-Werte oder für deren Mittelwert besteht.

Wir wollen diese Unterscheidung mit Beispielen illustrieren und ihre Tragweite darlegen.

Wenn die Gruppierung der Heiraten nach dem Alter des Bräutigams und jenem der Braut gegeben ist, können wir diese nach dem Alter h des Bräutigams gliedern und, für jede Gruppe gleichaltriger männlicher Eheschliessender, das mittlere Alter $\bar{w}$ ihrer Bräute berechnen. Wir erhalten so eine beschreibende Beziehung zwischen dem Alter des Bräutigams und dem entsprechenden mittleren Alter der Braut. Andrerseits können wird das gewogene Mittel ($M_{\bar{w}}$) der mittleren Alter $\bar{w}$ der Gruppen von Bräuten, das gleich dem Mittelwert (M_w) der Alter aller Bräute ist, bestimmen und zum gewogenen Mittel (M_h) aus den Altern aller Bräutigame in Beziehung setzen, wodurch wir eine durchschnittliche Beziehung zwischen dem Alter des Bräutigams und jenem der Braut erhalten.

Offenbar ist die Voraussage über das Alter der Braut, die man auf Grund der Kenntnis über das Alter des Bräutigams stellt, indem man auf die durchschnittliche Beziehung abstellt, bedeutend weniger annähernd als die Voraussage, die man auf Grund der beschreibenden Beziehung unternimmt. Die Summe der Quadrate der Fehler, die man begeht, wenn man auf die durchschnittliche Beziehung abstellt, ist gleich der Summe der Fehler, die einem unterlaufen, wenn man sich der beschreibenden Beziehung bedient, vermehrt um die Summe der Quadrate der Abweichungen der mittleren Alter $\bar{w}$ der Bräute von ihrem allgemeinen gewogenen Mittel $M_{\bar{w}}$.

Die Beziehung zwischen dem mittleren Alter der Bräutigame und dem mittleren Alter der Bräute ist umkehrbar, wie es die durchschnittlichen Beziehungen stets sind, da sie zwischen Grössen bestehen, die dem Werte wie ihrem Vorzeichen nach bestimmt sind. Wenn daher M_h das mittlere Alter der

Bräutigame bezeichnet und M_w jenes der Bräute, und wenn $M_h - M_w = d$ ist, gelangt man von M_w zu M_h, indem man d addiert, oder von M_h zu M_w, indem man d subtrahiert.

Demgegenüber ist die beschreibende Beziehung zwischen den Werten von h und den entsprechenden Werten von $\bar{w}$, wie allgemein die beschreibenden Beziehungen zwischen einander entsprechenden Grössen, denen man in der Statistik begegnet, in dem Sinne nicht umkehrbar, dass sie nicht mehr besteht, wenn man mit w das Alter einer Gruppe von Bräuten und mit $\bar{h}$ das mittlere Alter der entsprechenden Bräutigame bezeichnet. Dies bedeutet, dass die Regressionskurve des mittleren Alters der Bräutigame über dem Alter der Bräute nicht übereinstimmt mit der Regressionskurve des mittleren Alters der Bräute über dem Alter der Bräutigame.

Während also die umgekehrte Beziehung zwischen entsprechenden Grössen, in diesem wie in der Mehrzahl der Fälle, als beschreibende Beziehung nicht zutrifft, kann es geschehen, dass sie als durchschnittliche Beziehung gültig ist. Dies wird von der Form der beschreibenden Beziehung abhängen.

Nehmen wir an, dass zwischen dem Alter h einer Gruppe von Bräutigamen und dem mittleren Alter $\bar{w}$ ihrer Bräute die beschreibende Beziehung gelte, die — nach allgemeiner Ansicht — dem Ideal entspricht. Tatsächlich wird allgemein geraten, eine Braut zu wählen, die das Alter von 20 Jahren um halb so viel Jahre wie der Bräutigam überschritten hat. Es müsste also sein

$$w - 20 = \frac{h - 20}{2} \quad \text{und daher} \quad 10 + 0{,}5\,h = w.$$

Dieses Ideal trifft in den einzelnen Fällen nicht zu, da — wie wohl bekannt ist — nicht alle Bräutigame eines bestimmten Alters Bräute gleichen Alters zur Frau nehmen; wir können jedoch annehmen, dass diese Beziehung für die mittleren Alter der Bräute gilt, so dass für alle Gruppen zukünftiger Ehemänner des Alters h die Gleichung

$$10 + 0{,}5\,h = \bar{w} \tag{1}$$

besteht.

Diese beschreibende Beziehung ist nicht umkehrbar, und daher bestätigt sich die beschreibende Beziehung

$$2\,(w - 10) = \bar{h} \tag{2}$$

nicht. Wendet man jedoch die Gleichung (1) auf alle Gruppen von Bräutigamen an, und bestimmt man dann das gewogene Mittel aus den erhaltenen Werten, so ergibt sich (mit p das Gewicht einer jeden Gruppe bezeichnend)

$$10 + 0{,}5\,\frac{\sum ph}{\sum p} = \frac{\sum p\bar{w}}{\sum p} \tag{3}$$

oder

$$10 + 0{,}5\,M_h = M_w \tag{4}$$

und folglich

$$2(M_w - 10) = M_h,$$

welche Gleichung zeigt, dass die umgekehrte Beziehung (2), die nicht als beschreibende, so doch als durchschnittliche Beziehung gültig ist.

Wäre jedoch die beschreibende Beziehung zwischen dem Alter des Bräutigams und dem mittleren Alter der Braut von der Form

$$c + \frac{h^a}{b} = \bar{w},$$

worin a, b, c Konstanten sind, so gälte die umgekehrte Beziehung weder als beschreibende noch als durchschnittliche Beziehung.

Wenn ähnlicherart in der Gleichung (1) $\bar{w}$ nicht das mittlere Alter, sondern das Median- oder das Modalalter der entsprechenden Bräute bezeichnen würde, könnte es geschehen, dass die umgekehrte Beziehung (2) keine Geltung besässe, und zwar nicht nur als beschreibende, sondern auch als durchschnittliche Beziehung, da

$$\frac{\sum p\bar{w}}{\sum p} \neq M_w$$

sein könnte, in welchem Falle der Übergang von (3) zu (4) unstatthaft wäre.

* * *

Das bisher Gesagte sei an den Zahlen über das Alter der Bräutigame und der Bräute veranschaulicht, die in der nachfolgenden, aus den *Elementi di Statistica* von Professor *Livio Livi* [1] wiedergegebenen Korrelationstabelle enthalten sind. Die Rechnungen wurden von Dr. *G. Pompilj* durchgeführt, der an den in Betracht stehenden Zahlenwerten diese und andere Verarbeitungen anlässlich eines von ihm abgehaltenen Kurses über Statistik, der für Kriegsgefangene bestimmt war, vorgenommen hatte.

Alter des Bräutigams Jahre	Alter der Braut							Insgesamt
	bis 20	20—25	25—30	30—35	35—40	40—45	45—50	
bis 20. . .	17	10	3	1	1	—	—	32
20—25. . .	78	138	51	10	3	1	—	281
25—30. . .	47	158	136	31	9	3	1	385
30—35. . .	11	40	65	40	11	4	2	173
35—40. . .	2	10	21	19	13	6	2	73
40—45. . .	1	3	7	9	7	6	3	36
45—50. . .	—	1	3	4	4	4	4	20
zusammen	156	360	286	114	48	24	12	1000

[1] Cedam, Padua, Ausgabe 1926, 295. Es ist nicht angegeben, auf welche Bevölkerung sich diese Zahlen beziehen.

Das mittlere Alter der Bräutigame ist $M_h = 28{,}3$ und jenes der Bräute $M_w = 25{,}8$.

Die durchschnittliche Beziehung

$$28{,}3 = 25{,}8 + 2{,}5$$

ist offenbar umkehrbar, ist doch $25{,}8 = 28{,}3 - 2{,}5$.

Die folgende kleine Tabelle gibt die Zahlenwerte für das mittlere Alter der Bräutigame ($\bar{h}$) wieder, die den verschiedenen Altern der Bräute entsprechen (Spalten 1 und 2), sowie die Werte für die mittleren Alter der Bräute ($\bar{w}$), die den Altern der Bräutigame (h) zugeordnet sind (Spalten 3 und 4).

w (1)	$\bar{h}$ (2)	h (3)	$\bar{w}$ (4)
17,5	24,5	17,5	21,1
22,5	26,35	22,5	22,6
27,5	28,95	27,5	25
32,5	32,25	32,5	28,05
37,5	34,65	37,5	31,4
42,5	37,7	42,5	34,15
47,5	40,4	47,5	37,25

Die beschreibenden Beziehungen, die in diesen Werten ihren Ausdruck finden, sind eben nicht umkehrbar. Einem Alter der Braut von beispielsweise 42,5 Jahren (Spalte 1) entspricht ein mittleres Alter des Bräutigams von 37,7 Jahren (Spalte 2); einem Alter des Bräutigams von 37,7 Jahren aber ist ein mittleres Alter der Braut zugeordnet, das bedeutend unter 42,5 Jahren liegt und ungefähr 31,5 Jahre beträgt, wie den Spalten 3 und 4 entnommen werden kann. Diese zeigen tatsächlich, dass den Bräutigamen von 37,5 Jahren Bräute mit einem mittleren Alter von 31,4 Jahren entsprechen. In ähnlicher Weise sind den Bräutigamen von 47,5 Jahren (Spalte 3) Bräute mit einem mittleren Alter von 37,25 Jahren (Spalte 4) zugeordnet. Bräuten dieses Alters entsprechen aber Bräutigame, die im Mittel nicht 47,5 Jahre, sondern ungefähr 34,5 Jahre zählen, wie aus den Spalten 1 und 2 hervorgeht.

Die Beziehung zwischen den h und den $\bar{w}$ (wie auch jene zwischen den w und den $\bar{h}$) ist praktisch linear. Die Regressionsgerade ist durch die Gleichung

$$\bar{w} = 9{,}7 + 0{,}567\,h \tag{5}$$

gegeben. (Man beachte, wie eng diese empirische Beziehung sich an die Beziehung $\bar{w} = 10 + 0{,}5\,h$, die allgemein als ideal gilt, angleicht.)

Die Beziehung zwischen den w und den $\bar{h}$ kann nicht aus der Umkehrung der Gleichung (5) gewonnen werden, was zur Gleichung

$$\bar{h} = \frac{-9{,}7 + w}{0{,}567} \tag{6}$$

führen würde. Sie ist aber durch die Regressionsgerade

$$\bar{h} = 14{,}5 + 0{,}533\, w \tag{7}$$

gegeben.

Die Gleichung (6) gilt jedoch als durchschnittliche Beziehung, denn es ist

$$M_{\bar{h}} = \frac{-9{,}7 + M_w}{0{,}567}.$$

Für $M_w = 25{,}8$ (mittleres Alter der Bräute) erhält man tatsächlich $M_{\bar{h}} = 28{,}3$, was eben gleich dem mittleren Alter der Bräutigame ist.

In ähnlicher Weise wäre die Gleichung (7) als beschreibende Beziehung nicht umkehrbar, ist doch die beschreibende Beziehung zwischen den h und den $\bar{w}$ durch die Gleichung (5) bestimmt; aber, wenn umgekehrt, erscheint sie gültig als durchschnittliche Beziehung, denn es ist

$$M_{\bar{w}} = \frac{-14{,}5 + M_h}{0{,}533},$$

woraus sich, für $M_h = 28{,}3$, $M_{\bar{w}} = 25{,}8$ ergibt.

* * *

Es sei noch ein anderes Beispiel angeführt.

Betrachten wir die Korrelationstafel zwischen der Grösse und dem Brustumfang der 255 181 italienischen Soldaten im Alter von 20 Jahren (Klassen 1859—1863), die in der *Antropometria militare*, Bd. II [1] veröffentlicht ist (S. 92—93).

Für jeden Brustumfang hat Dr. *A. Giannone* das erste, das zweite Quartil oder den Medianwert und das dritte Quartil der entsprechenden Körpergrössen berechnet. Aus der Verbindung der erhaltenen Werte resultieren die drei in der folgenden Abbildung dargestellten Kurven, die mit den Zahlen 1, 2, 3 bezeichnet sind.

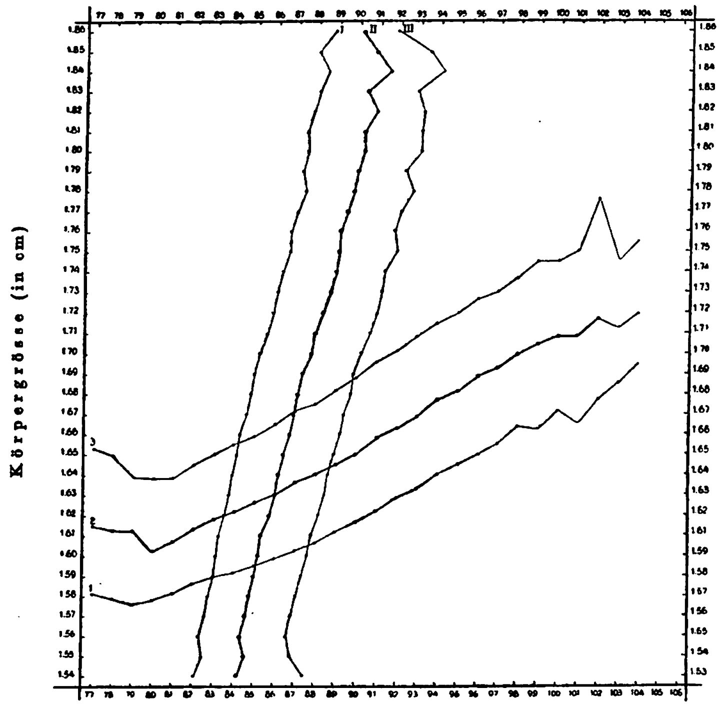
Die durch diese drei Kurven verbildlichten beschreibenden Beziehungen zwischen den Werten der Brustumfänge und jenen des ersten, zweiten und dritten Quartils der Körpergrössen sind nicht umkehrbar. Denn bestimmt man das erste, das zweite und das dritte Quartil der den Körpergrössenzahlen entsprechenden Brustumfänge, so erhält man recht verschiedengeartete Kurven, die je durch die Kurven I, II, III des gleichen Diagramms dargestellt werden.

Wir bezeichnen die Fläche zwischen dem ersten und dem dritten Quartil im Diagramm als *interquartiles Feld*; das interquartile Feld für die den verschiedenen Körpergrössen entsprechenden Brustumfänge und jenes der den

---

[1] *Antropometria militare*, Teil II: *Dati demografici e biologici;* Rom 1905.

verschiedenen Brustumfangszahlen zugehörigen Körpergrössen stimmen ganz und gar nicht miteinander überein; beide enthalten voraussetzungsgemäss je 50% der Fälle, sie überdecken sich jedoch nur zu 25,5% der Fälle.



Nicht nur die beschreibende Beziehung, die in den Quartilkurven ihren Ausdruck findet, sondern folglich auch die beschreibende Beziehung, die durch die interquartilen Felder ausgedrückt wird, hat, wenn umgekehrt, als beschreibende Beziehung keine Gültigkeit. Sie bleibt jedoch als durchschnittliche Beziehung gültig.

Unrichtig ist es nämlich, dass das interquartile Feld der den verschiedenen Körpergrössen entsprechenden Brustumfangszahlen auch die interquartilen Intervalle der den verschiedenen Brustumfangszahlen zugeordneten Körpergrössen enthalte, so dass 50% der den einzelnen Brustumfängen entsprechenden Körpergrössen auf die Ordinatensegmente, die sich innerhalb jenes interquartilen Feldes befinden, entfallen. Es gibt nämlich sehr grosse (oberhalb 94,5 cm) und sehr kleine (unterhalb 82 cm) Brustumfänge, denen stets Körpergrössen zugeordnet sind, welche ganz ausserhalb des genannten interquartilen Feldes liegen, während den mittleren Brustumfangszahlen Körpergrössen entsprechen, die grösstenteils im erwähnten Feld begriffen sind. Es ist aber offensichtlich, dass — die Brustumfänge insgesamt betrachtet —

50% der entsprechenden Körpergrössen dem interquartilen Feld der Brustumfangszahlen angehören.

In ähnlicher Weise ist es unrichtig, dass das interquartile Feld der den Brustumfängen entsprechenden Körpergrössen auch die interquartilen Intervalle enthalte, die den verschiedenen Körpergrössen entsprechen, so dass für jede Körpergrösse 50% der Brustumfangszahlen auf den entsprechenden Abzissensegmenten innerhalb jenes interquartilen Feldes enthalten sind. Alle Körpergrössen insgesamt betrachtet, ist es aber augenfällig, dass die Hälfte der entsprechenden Brustumfänge in das interquartile Feld der Körpergrössen fällt.

Eine analoge Folgerung ergäbe sich, wenn man statt des interquartilen Intervalls ein Intervall zwischen zwei beliebigen Dezilen, Vigintilen, Quingintilen oder Perzentilen usf. betrachten würde.

* *
*

Einen dem letzteren ähnlichen Fall stellt jener dar, in welchem eine als unabhängig angenommene Veränderliche durch den Wert eines bestimmten Parameters aus einer bestimmten Gesamtheit dargestellt wird, und die andere als Funktionswert angenommene Veränderliche durch den Wert des genannten Parameters gekennzeichnet wird, der aus einer eine bestimmte Anzahl von Elementen enthaltenen Stichprobe hervorgegangen ist. Gewöhnlich wird das Intervall derart gewählt, dass der beobachtete Wert aus der Stichprobe mit einer hohen Wahrscheinlichkeit (allgemein gleich 0,95 oder 0,997 gesetzt) in ihm enthalten ist. Diese Wahrscheinlichkeit wird als *Vertrauenskoeffizient* bezeichnet; *Vertrauensintervall* wird das in Betracht fallende Intervall benannt, während die Kurven, welche die oberen bzw. die unteren Grenzen des Vertrauensintervalls miteinander verbinden, den *Vertrauensraum* abgrenzen.

Es geht aus dem bisher Dargelegten hervor, dass die beschreibende Beziehung zwischen dem Wert des Parameters der Gesamtheit und dem in der Stichprobe beobachteten Wert des Parameters nicht umkehrbar ist, dass aber die umgekehrte Beziehung als durchschnittliche Beziehung gültig bleibt; mit andern Worten: auf Grund des in der Stichprobe beobachteten Wertes des Parameters kann man nicht mit der dem vorgegebenen Vertrauensniveau entsprechenden Wahrscheinlichkeit behaupten, der Wert des Parameters aus der Gesamtheit, welcher die Stichprobe entnommen ist, falle in den Vertrauensraum. Diese Behauptung wird aber zulässig, wenn man gesamthaft alle möglichen Werte betrachtet, die der Parameter in den einzelnen Stichproben annimmt.

Einige Autoren sagen, dass sich diese Behauptung «auf lange Sicht» (in the long run) gültig erweise, aber tatsächlich ist dies nicht das ihr Charakteristische. Alle Beziehungen, die das Eintreffen von Ereignissen bestimmter Wahrscheinlichkeit in sich schliessen, erhärten sich nur auf lange Sicht, d. h. in einer grossen Zahl von Fällen. Auch eine direkte Beziehung zwischen dem Wert des Parameters in einer Gesamtheit und der Häufigkeit, mit welcher der Parameterwert der Stichprobe innerhalb des Vertrauensintervalles fällt, kann sich nur auf lange Sicht, d. h. in einer grossen Zahl von Fällen, bewahrheiten. Der Hauptunterschied aber zwischen dieser und der invertierten Beziehung ist der, dass jene für alle Werte der Veränderlichen gilt (sie stellt also eine beschreibende Beziehung dar), diese jedoch nur für die Totalität der in Betracht fallenden Werte (sie ist also eine globale oder durchschnittliche Beziehung).

* * *

Wir gehen nun dazu über, andere Beispiele von Beziehungen zwischen einem Parameter in der Gesamtheit und dem entsprechenden in einer Stichprobe beobachteten Wert des Parameters zu betrachten.

Es sei V_m die Varianz innerhalb einer aus m Elementen bestehenden Gesamtheit und V_c die Varianz für eine ihrer aus c Elementen gebildeten Stichprobe. Die Varianz der Stichprobe kann jene der Gesamtheit unter- oder übertreffen. Nimmt man jedoch das Mittel aus allen Werten von V_c, ein jedes mit der Wahrscheinlichkeit des Eintreffens in den $\binom{m}{c}$ möglichen Stichproben gewichtet, so findet sich, dass dieser Mittelwert nicht gleich V_m ist, sondern gleich

$$V_m \frac{m}{m-1} \frac{c-1}{c},$$

was auch folgendermassen geschrieben werden kann:

$$\bar{V}_c = \frac{c-1}{c} \frac{m}{m-1} V_m, \tag{8}$$

worin $\bar{V}_c$ als *wahrscheinlicher*, oder *zu erwartender (expected)* oder *mittlerer Wert von V_c, der V_m entspricht* gelesen wird.

Die Gleichung (8) gilt für alle aus c Elementen gebildeten Stichproben, die aus m-elementigen Gesamtheiten hervorgegangen sind, welches auch die Varianz V_m sei; sie stellt also eine beschreibende Beziehung dar. Sie ist genau die Gleichung der Regressionsgeraden von $\bar{V}_c$ über V_m.

Wenn wir eine Stichprobe aus c Elementen beobachtet haben, von welcher wir wissen, dass sie aus einer m Elemente umfassenden Gesamtheit stammt, deren Varianz V_m uns unbekannt ist, und wenn wir die Varianz V_c der Stichprobe ermitteln, können wir uns dann der invertierten Gleichung (8) bedienen, um vom beobachteten Wert V_c der Stichprobe zum unbekannten Wert der Varianz V_m in der Gesamtheit zu gelangen?

Wir können es nicht, und zwar gleichgültig, ob eine einzige Gesamtheit von m Elementen besteht, der die Stichprobe entnommen werden kann, oder ob es deren eine Vielzahl gibt, welche die gleiche Zahl von Elementen umfassen, aber verschiedenwertige V_m besitzen, wie wir einer umfassenderen Allgemeinheit willen annehmen wollen.

Tatsächlich besteht im allgemeinen die Gleichung

$$\overline{V}_m = \frac{c}{c-1}\,\frac{m-1}{m}\,V_c$$

nicht; wenn man jedoch statt eines einzelnen Wertes von V_c alle diese möglichen Werte betrachtet und den Durchschnitt ermittelt, so wird die folgende Gleichung bestehen

$$\frac{1}{n}\sum \overline{V}_m = \frac{c}{c-1}\,\frac{m-1}{m}\,\frac{1}{n}\sum V_c, \tag{9}$$

worin $n = \binom{m}{c} t$ ist, und t die Zahl der Gesamtheiten eines Elementes bedeutet, wovon jede die Stichprobe hätte hervorbringen können, und $\binom{m}{c}$ die Zahl der möglichen Stichproben aus c Elementen, die einer Gesamtheit von m Elementen hätten entnommen werden können.

Die Gleichung (9) stellt nun das Ergebnis der Umkehrung der Gleichung (8) dar, jedoch nicht auf die einzelnen möglichen Werte von V_c angewendet, sondern auf deren Mittel.

Sowohl die Gleichung (8) als auch die Gleichung (9) werden gewöhnlich dadurch ausgedrückt, dass man sagt, es sei zu erwarten

$$V_c = \frac{c-1}{c}\,\frac{m}{m-1}\,V_m. \tag{10}$$

Dieser Ausdruck ist jedoch zweideutig, denn er drückt mit gleichen Worten in verschiedenen Fällen verschiedene Wahrheiten aus. Tatsächlich ist die Gleichung (10) für jeden Wert von V_m zu erwarten, wenn V_m bekannt und V_c unbekannt ist. Ist V_c bekannt und V_m unbekannt, dann ist die Gleichung (10) nur für das Mittel aus den Werten V_c zu erwarten.

* * *

Führen wir ein anderes Beispiel an.

Bei bekanntem Medianwert einer aus einer geraden Zahl von Elementen bestehenden Gesamtheit besteht die Wahrscheinlichkeit 1:4, dass von zwei zufällig aus der Gesamtheit entnommenen Elementen beide kleiner als der Median sind. Diese Beziehung gilt, welches auch der Wert des Medians sein mag; sie ist also eine beschreibende Beziehung.

Hat man aus einer Gesamtheit zwei Elemente mit den Werten $\check{x}_1$ und $\check{x}_2$ gezogen, kann man sagen — und in welchem Sinne —, dass die Wahrscheinlichkeit 1:4 bestehe, beide seien kleiner als der Medianwert der Gesamtheit, den wir nicht kennen?

Es besteht kein Grund, zu vermuten, dass das Elementenpaar $\check{x}_1$, $\check{x}_2$ sich nur ein einziges Mal gezeigt hat, noch dass es stets der gleichen Gesamtheit entstammt, und auch nicht, dass die Gesamtheit, woraus es entnommen ist, stets durch die gleiche Zahl von Beobachtungen umfasst ist.

Nun, solange wir uns auf die beiden Elemente mit den Werten $\check{x}_1$, $\check{x}_2$ beschränken, ist die Behauptung nicht zulässig. Wir können beispielsweise annehmen, die beiden Elemente 1 und 4 seien viermal gezogen worden, und sie seien aus den folgenden vier Gesamtheiten hervorgegangen:

0	1	2	3	4	5	8	10
0	1	2	3	4	5	7	9
0	1	2	4	10	15		
1	2	3	4	10	20		

In einem solchen Falle erscheint in allen Gesamtheiten tatsächlich der eine Wert grösser und der andere kleiner als der Medianwert. Nehmen wir aber an, wir hätten nicht nur die Paare der Elemente 1 und 4, sondern alle möglichen Elementenpaare aus den vier Gesamtheiten gezogen, dann wird die umgekehrte Beziehung gültig.

Mit anderen Worten, die umgekehrte Beziehung ist gültig nicht für jedes einzelne der möglichen Elementenpaare der Gesamtheit, sondern nur für die Totalität aller möglichen Elementenpaare, die gezogen werden können. Sie gilt also als globale oder durchschnittliche und nicht als beschreibende Beziehung.

* * *

Lassen wir das Gebiet der Gesamtheiten und der Stichproben beiseite und wenden wir uns einem etwas andersgearteten Beispiel zu.

Es seien $s+1$ Urnen gegeben, von welchen wir wissen, dass jede einzelne s weisse und schwarze Kugeln in verschiedenen Zahlverhältnissen enthält. Diese Verhältnisse sind dann

$$\frac{0}{s} \text{ bzw. } \frac{1}{s} \text{ bzw. } \frac{2}{s} \ldots \text{ bzw. } \frac{s-1}{s} \text{ bzw. } \frac{s}{s}.$$

Wir wissen jedoch nicht, welcher Urne das eine und welcher das andere Zahlverhältnis entspricht.

Aus einer der Urnen haben wir n Kugeln gezogen, von welchen m weiss und $n-m$ schwarz waren. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine weitere aus der gleichen Urne gezogene Kugel weiss ist?

Es ist bekanntlich bewiesen, dass diese Wahrscheinlichkeit gleich $\frac{m+1}{n+2}$ ist. Dies stellt eine beschreibende Beziehung dar, die für alle Werte von m Geltung beansprucht. Sie liefert uns ein brauchbares Element der Voraussage.

Die entsprechende durchschnittliche Beziehung wird erhalten, indem man m alle $n+1$ möglichen Werte von 0 bis n (die auch gleichmöglich sind) annehmen lässt, und das Mittel aus den entsprechenden $n+1$ Werten des Verhältnisses $\frac{m+1}{n+2}$ bildet. Die so berechnete durchschnittliche Wahrscheinlichkeit, eine weisse Kugel zu ziehen, ergibt sich 1:2. Dieses Ergebnis ist von sehr geringem Nutzen. Wir konnten es direkt aus der Gleichverteilung aller Urnenfüllungen ermitteln, denn daraus leitet sich ab, dass in allen Urnen insgesamt gleich viel weisse wie schwarze Kugeln enthalten sind.

Wir führten dieses Beispiel an, um die grössere Nützlichkeit einer beschreibenden gegenüber einer durchschnittlichen Beziehung darzulegen.

* * *

Ich habe den Eindruck, dass in Diskussionen über inverse Wahrscheinlichkeiten, über Signifikanztests, über Vertrauensintervalle usw. nicht immer zwischen beschreibenden und durchschnittlichen Beziehungen unterschieden oder nicht genügend unterschieden wurde, oder dass man die Tragweite der Unterscheidung nicht genügend erfasst hat und dass viele Dispute vermieden worden wären, wenn man klargelegt hätte, was man unter «umkehrbarer Beziehung» versteht.

Wenn eine beschreibende Beziehung invertiert wird und die invertierte Beziehung sich nicht als beschreibende, sondern nur als durchschnittliche Beziehung gültig erweist, müssen wir dann sagen, dass sie umkehrbar sei? Meiner Ansicht nach nicht.

Es scheint mir offensichtlich, dass eine beschreibende Beziehung nur dann als «umkehrbar» oder «invertibel» bezeichnet werden sollte, wenn die invertierte Beziehung auch als beschreibende Beziehung gültig ist.

Es wäre zweckmässig, eine beschreibende Beziehung, die, wenn umgekehrt, nur als durchschnittliche oder globale Beziehung gilt, anders zu bezeichnen, beispielsweise als «*subinvertible Beziehung*»[1].

---

[1] Professor *Anderson*, in dem in dieser gleichen Nummer veröffentlichten Aufsatz *Zum Problem der Wahrscheinlichkeit a posteriori in der Statistik*, spricht dagegen von «Umkehrung», sogar von «vollständiger Umkehrung», wenn die umgekehrte Beziehung nur als globale oder durchschnittliche Beziehung gültig ist, wie es eben bei der Anwendung des Millotschen Verfahrens auf das Theorem von Bernoulli der Fall ist *(A. Das Millotsche Verfahren)*. Wer in solchem Falle den obigen Ausdruck — den ich für ungeeignet halte — und nicht den von mir vorgeschlagenen «Subinversion» anwenden will, wird jedenfalls anerkennen müssen, dass es sich um eine Umkehrung handelt, die einen sehr verschiedenen Charakter und eine viel begrenztere Tragweite hat, als die von Laplace auf Grund der Hypothese der Gleichwahrscheinlichkeit der Ursachen erzielten Umkehrung, in welcher Hypothese die umgekehrte Beziehung nicht nur als Globalbeziehung, sondern auch als beschreibende Beziehung gültig ist.

Bezüglich der Umkehrung des Theorems von Bernoulli, welcher Professor *Anderson* den nachfolgenden Abschnitt seines Aufsatzes *(B. Umkehrung des Theorems von Bernoulli)* widmet, besteht meiner Ansicht nach der kritische Punkt der Beweisführung in der Summe der einzelnen — aus der Gleichung (24) gezogenen — direkten Wahrscheinlichkeit $P_{m/n}$, eine Summe, von welcher er auf die totale umgekehrte Wahrscheinlichkeit, durch die Gleichung (25) ausgedrückt, übergeht. Nun, alle Werte von $P_{m/n}$, die den verschiedenen Werten von p entsprechen, treten in jener Summe mit dem gleichen Gewicht auf, d. h. jene Summe impliziert die Gleich-

Auf Grund dieser Terminologie können wir sagen, dass die Vertrauensintervalle nicht umkehrbar oder invertibel, sondern subinvertibel sind. Sie sind nicht invertibel, ausgenommen selbstverständlich besondere Hypothesen. Im gleichen Sinne sind die Regressionsgeraden subinvertibel, jedoch nicht invertibel.

* * *

Wir müssen uns nun zwei Fragen stellen. *Welches sind die Bedingungen, damit eine beschreibende Beziehung umkehrbar oder invertibel ist?*

Welches sind die Bedingungen, damit sie subinvertibel ist?

Ähnliche Fragen stellen sich bei den durchschnittlichen Beziehungen nicht, welche — wie wir gesehen haben — stets invertibel sind.

Die Bedingungen der Invertibilität einer beschreibenden Beziehung sind je nach der Beziehung verschieden.

Für die Umkehrung der Beziehung zwischen der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses und der Wahrscheinlichkeit, dass die Häufigkeit des Eintretens dieses Ereignisses bei einer gegebenen Zahl von Beobachtungen um nicht mehr als einen bestimmten Betrag von ihr abweicht (durch das Theorem von Bernoulli ausgedrückte Wahrscheinlichkeit), besteht, wie *Laplace* bewiesen hat, die hinreichende Bedingung, dass bei einer grossen Zahl von Beobachtungen alle möglichen Werte der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, dessen Häufigkeit beobachtet wurde, a priori gleich möglich seien.

Für die Beziehung zwischen der Grösse eines extensiven Merkmals und der Wahrscheinlichkeit, dass eine seiner Wirkungen oder Modalitäten (die auch die Grösse des gleichen Merkmals in einer Stichprobe sein kann) eine bestimmte Grenze überschreite oder innerhalb bestimmter Grenzen begriffen sei, sind — wie ich gezeigt habe[1] — hinreichende Bedingungen der Invertibilität, dass a priori alle Grössen des Merkmals gleichmöglich sind und dass die Verteilung der Wirkungen oder der Modalitäten für alle a priori möglichen Grössen des Merkmals konstant ist.

---

wahrscheinlichkeit aller Werte der Wahrscheinlichkeit a priori p, welche die beobachtete Frequenz $\frac{m}{n}$ bestimmen können. Die Beweisführung setzt also eine ähnliche Hypothese voraus, wie diejenige, welche der Beweisführung von Laplace als Grundlage dient.

Ich stimme dagegen mit Professor *Anderson* überein, wenn er die Wahrscheinlichkeit, dass eine Erscheinung eine gewisse Modalität darbietet, als die relative Frequenz der Modalität in der Gesamtheit der Fälle, die in den Begriff der in Betracht kommenden Erscheinung eingehen, bezeichnet, und wenn er annimmt, dass die Wahrscheinlichkeit sich stets auf eine genau bestimmte Gesamtheit von Fällen bezieht. Es sind dies Begriffe, die ich vor mehr als 40 Jahren dargelegt habe (vgl. die Mitteilung *Sul concetto di probabilità*, «Questioni filosofiche», Verhandlungen des 2. Kongresses der Italienischen Philosophischen Gesellschaft, Parma, 25.—27. September 1907, und den Aufsatz *Che cos'è la probabilità?*, Rivista di Scienza «Scientia», 3. Bd., II. Jahrg., Nr. 6, 1908) und auf welche ich noch kürzlich zurückgekommen bin (vgl. die Aufsätze *Alle basi del metodo statistico*, «Metron», Bd. 14, Nrn. 2—3—4, Dezember 1941, und *Intorno alle basi logiche e alla portata gnoseologica del metodo statistico*, «Statistica», 1945/46).

[1] Vgl. Sulla probabilità inversa nel caso di grandezze a distribuzione costante, in «Atti della VII^a Riunione della Società Italiana di Statistica», Rom, 27.—30. Juni 1943.

Man beachte, dass man stets von «hinreichenden Bedingungen», nicht von «notwendigen Bedingungen» spricht. Es können daher mehrere Bedingungssysteme bestehen, die hinreichend sind. Ein anderes System von hinreichenden Invertibilitätsbedingungen für die letztgenannte Beziehung ist beispielsweise jenes, dass die Logarithmen der Grössen des extensiven Merkmals a priori gleichmöglich sind und dass für alle a priori möglichen Grössen die Verteilung der Logarithmen der Wirkungen oder Modalitäten des Merkmals konstant bleiben[1].

Für die Subinvertibilität kann man eine hinreichende Bedingung allgemeinen Charakters nennen.

Ist die beschreibende Beziehung linear, so gilt sie auch für durchschnittliche Werte und ist folglich auch als durchschnittliche Beziehung gültig. Andrerseits aber wissen wir, dass eine durchschnittliche Beziehung stets invertibel ist. Daraus folgt, dass eine lineare beschreibende Beziehung immer subinvertibel ist.

Deshalb ist die durch die Gleichung

$$10 + 0{,}5\,h = \bar{w}$$

ausgedrückte Beziehung, wie wir gesehen haben, subinvertibel, während gleiches von der anderen Gleichung

$$c + \frac{h^a}{b} = \bar{w}$$

nicht ausgesagt werden kann.

Eine konstante beschreibende Beziehung (so jene der interquartilen Intervalle oder jene der Vertrauensintervalle) stellt einen Sonderfall von linearer beschreibender Beziehung dar.

* * *

Bis jetzt habe ich es vermieden, von *inverser* Beziehung zu sprechen.

Dieser Ausdruck, wie auch jener besondere der *inversen Wahrscheinlichkeit*, wird nämlich in zwei verschiedenen Bedeutungen gebraucht.

A. Wenn die direkte Beziehung aussagt, wie das Merkmal y in Abhängigkeit von Veränderungen eines Merkmals x ändert, so bezeichnet man jene Beziehung, die darlegt, wie das Merkmal x in Abhängigkeit von Veränderungen des Merkmals y variiert, als invers.

Wenn daher

$$\bar{w} = 9{,}7 + 0{,}567\,h \tag{5}$$

die direkte Beziehung (5) ist, die zeigt, wie sich das mittlere Alter der Braut in Abhängigkeit vom Alter des Bräutigams verändert, so wird

$$\bar{h} = 14{,}5 + 0{,}533\,w \tag{7}$$

die entsprechende inverse Beziehung (7) sein, die über Veränderungen des mittleren Alters des Bräutigams in Abhängigkeit vom Alter der Braut aussagt.

---

[1] Vgl. Del passaggio dall'indice di variabilità di un campione all'indice di variabilità della massa, unter Druck befindliche Mitteilung, die im Seminar des Statistischen Institutes der Universität Rom während der Sitzung vom 25. Juni 1946 vorgetragen wurde.

Wenn die Beziehung (11) zwischen der Wahrscheinlichkeit p und der Häufigkeit f, die uns sagt, bei gegebenem p bestehe die Wahrscheinlichkeit 0,997, dass f, in n Beobachtungen innerhalb der Grenzen

$$p \pm 3 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

begriffen sei, direkt ist, so wird man die Beziehung (12), welche aussagt, dass, wenn man in n Beobachtungen die Häufigkeit f feststellt, die Wahrscheinlichkeit 0,997 bestehe, dass p innerhalb der Grenzen

$$f \pm 3 \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}$$

begriffen sei, als inverse Beziehung bezeichnen.

B. Bei gegebener direkter Beziehung, die ausdrückt, wie das Merkmal y in Abhängigkeit der Veränderungen des Merkmals x ändert, wird nicht jede Beziehung invers genannt, die die Veränderungen des Merkmals x in Abhängigkeit des Merkmals y ausdrückt, sondern nur jene Beziehung, die die umgekehrte direkte Beziehung darstellt.

In dieser Bedeutung ist daher die Gleichung (12) eine inverse Beziehung der Gleichung (11), die Gleichung (7) jedoch ist nicht eine inverse Beziehung der Gleichung (5).

Wir erachten es als zweckmässig, der Bezeichnung «inverse Beziehung» die engere Bedeutung, die unter B angeführt ist, zu unterstellen, und der weiteren Bedeutung unter A die Bezeichnung «*reziproke Beziehung*» beizulegen.

Die inverse Beziehung ist daher die reziproke Beziehung, die durch die invertierte direkte Beziehung gegeben ist. Gleichung (12) wird man daher als inverse Beziehung der Gleichung (11) bezeichnen, während Gleichung (7) die reziproke (nicht inverse) Beziehung der Gleichung (5) darstellt.

Übereinstimmend mit dem oben Gesagten wird man *subinvers* eine reziproke Beziehung nennen, die das Ergebnis einer Inversion darstellt, jedoch nicht für die einzelnen Werte von y gültig ist, sondern nur für deren Gesamtheit oder für deren Mittelwert.

Die subinverse Beziehung gestattet es, zum Zwecke der Voraussage der Grösse des Merkmals x, einer kleineren Zahl von Umständen Rechnung zu tragen, als es bei einer inversen Beziehung nötig wäre, und führt daher zu weniger genauen Voraussagen.

Ist uns nun eine reziproke Beziehung gegeben, die aus einer Inversion hervorgegangen ist, und die es gestattet, zum Zwecke der Voraussage der Grösse eines Merkmals x, einer grösseren Zahl von Umständen Rechnung zu tragen, als man bei der inversen Beziehung benötigt, so können wir, im Gegensatz dazu, eine solche Beziehung *super-invers* nennen.

Man nehme beispielsweise an, dass die Hypothese, dass die möglichen Werte der Wahrscheinlichkeit a priori eines Ereignisses gleichwahrscheinlich seien

(Hypothese *a*), nicht zutrifft, dass aber der Wert p der Wahrscheinlichkeit a priori eine Eintreffenswahrscheinlichkeit

$$\frac{(k+h+1)!}{k!\,h!}\,p^k(1-p)^h\,dp$$

habe (Hypothese *b*). Es lässt sich beweisen, dass dann die Wahrscheinlichkeit 0,997 besteht, dass, nachdem sich in n Beobachtungen die Häufigkeit $f = \frac{m}{n}$ gezeigt hat, der Wert der Wahrscheinlichkeit P des Ereignisses innerhalb der Grenzen

$$F \pm \sqrt{\frac{F(1-F)}{n}}$$

fällt, worin $F = \frac{m+k}{n+k+h}$ ist[1].

Diese Beziehung berücksichtigt ausser der Häufigkeit $\frac{m}{n}$ auch die Verteilungsungleichheit der Wahrscheinlichkeiten a priori, die durch die Parameter k und h gekennzeichnet ist und welche sich auf die bekannte, durch das inverse Theorem von *Bernoulli* für $k = 0$ und $h = 0$ gegebene Beziehung zurückführen lässt.

Im allgemeinen, wenn man aus einer direkten Beziehung, auf Grund gewisser Hypothesen, eine inverse Beziehung, aber auch, auf Grund allgemeinerer Annahmen, eine andere reziproke Beziehung gewinnen kann, die sich in besonderen Fällen auf die inverse Beziehung zurückführen lässt, kann man diese Beziehung *super-invers* bezeichnen.

In der reziproken super-inversen Beziehung erscheinen Parameter (in unserem Beispiel die Parameter k und h), die weder in der direkten noch in der inversen Beziehung vorhanden sind. Dies bedeutet zwar nicht, dass jede reziproke Beziehung, die Parameter enthält, die in der direkten und in der inversen Beziehung nicht in Erscheinung treten, eine super-inverse Beziehung sei; es ist notwendig, dass jene Parameter eine Inversionsbedingung widerspiegeln.

Eine reziproke super-inverse Beziehung gestattet selbstverständlich — wenn man die Bestimmungsgrössen für ihre Anwendung kennt — genauere Voraussagen als eine reziproke inverse Beziehung.

Die super-inversen Beziehungen, die auf Grund der Hypothese *b* erhalten worden sind, sind anwendbar auf Warenproben, die sich auf Muster gründen,

---

[1] Vgl. *C. Gini* und *G. Livada*, Sulla probabilità inversa nel caso di grandezze intensive ed in particolare sulle sue applicazioni a collaudi per masse a mezzo di campioni, in «Atti della VII^a^ Riunione della Società Italiana di Statistica», Rom, 27.—30. Juni 1943; *C. Gini*, Considerazioni sulle probabilità a posteriori e applicazioni al rapporto dei sessi nelle nascite umane, in «Studi economico-giuridici» der Universität Cagliari, III. Jg., 1911.

wenn die vorhergehenden Muster es gestatten, die Werte k und h zu bestimmen, und die Beispiele, die gegeben worden sind, zeigen, wie die Ergebnisse solcher Anwendungen grundverschieden sein können von jenen, die sich unter Verwendung des inversen Theorems von *Bernoulli* ergeben haben.

Die inversen Beziehungen im Sinne B können also unterschieden werden in:

a) *inverse Beziehungen im engeren Sinne*, die den gleichen Gültigkeitsbereich haben wie die entsprechenden direkten Beziehungen (sie sind also beschreibend, wenn diese beschreibend, und durchschnittlich, wenn diese durchschnittlich sind) und in welchen die gleichen Parameter erscheinen wie in den entsprechenden direkten Beziehungen;

b) *sub-inverse Beziehungen*, in denen die gleichen Parameter figurieren wie in den entsprechenden direkten Beziehungen, jedoch ein beschränkteres Gültigkeitsgebiet als jenes der entsprechenden direkten Beziehungen haben, da sie nur als durchschnittliche, die entsprechenden direkten Beziehungen aber als beschreibende Beziehungen gelten;

c) *super-inverse Beziehungen*, denen das gleiche Gültigkeitsgebiet eigen ist wie den direkten Beziehungen, da sie wie diese beschreibend sind, in die aber ausser den in den direkten Beziehungen vorhandenen Parametern noch andere eingehen, welche Inversionsbedingungen widerspiegeln, die allgemeiner sind als jene, die hinreichen, um die entsprechenden inversen Beziehungen im engern Sinne zu erhalten.

Von sub-inversen oder super-inversen Beziehungen kann man nur sprechen, wenn man direkte beschreibende Beziehungen im Auge hat.

Eine super-inverse Beziehung setzt übrigens das Bestehen einer inversen Beziehung voraus.

* * *

Wenn wir von beschreibenden Beziehungen sprachen, bezeichneten wir damit bis jetzt stets «beschreibende statistische Beziehungen», und wenn wir von «Umkehrung» oder «Inversion» dieser Beziehungen sprachen, verstanden wir die Inversion in einem bestimmten Sinne, den wir eben statistisch nennen könnten, so dass wir von nun an den Ausdruck «statistische Inversion» in diesem Sinne gebrauchen werden. Es wird gut sein, diese Bezeichnungen zu umschreiben.

Die «beschreibenden statistischen Beziehungen» stehen den «funktionalen Beziehungen» gegenüber. Eine beschreibende Beziehung stellt eine funktionale Beziehung dar, wenn sie für einzelne Werte der unabhängigen Veränderlichen gilt; sie ist jedoch eine statistische Beziehung, wenn sie lediglich für eine Mehrheit solcher Werte gilt, auch wenn sie alle untereinander gleich sind. Die Funktion drückt also einen statistischen Wert aus (Mittelwert oder Perzentuale), der nur Sinn hat, wenn er auf eine Mehrheit von Fällen bezogen wird.

Die beschreibenden Beziehungen zwischen dem Alter von Eheschliessenden, zwischen Körpergrösse und Brustumfang, zwischen Wahrscheinlichkeit und Häufigkeit, zwischen Varianz der Gesamtheit und der Stichprobe, zwischen

Median und einzelnen Werten der Reihe und die anderen, die wir in den vorhergehenden Abschnitten berücksichtigt haben, sind alles statistische Beziehungen.

Eine funktionale Beziehung kann eineindeutig sein oder nicht (sie ist es beispielsweise nicht für die Beziehung $y = x^2$); eine beschreibende statistische Beziehung ist nie eineindeutig.

Die «statistische Inversion» steht der «analytischen Inversion» gegenüber.

Man führt eine analytische Inversion durch, indem man die Veränderliche, die in der direkten Beziehung die unabhängig Variable war, als Funktion betrachtet und andrerseits als unabhängig Variable jene Veränderliche betrachtet, die in der direkten Beziehung als Funktion betrachtet wurde.

Die analytische Inversion kann man materiell für alle beschreibenden Beziehungen ausführen, seien es funktionale oder seien es statistische; sie ist aber nur gültig, wenn die Funktion monoton ist (die Beziehung bezeichnet man dann als umkehrbar oder invertibel).

Greifen wir beispielsweise die beschreibende statistische Beziehung zwischen dem Alter des Bräutigams h und dem mittleren Alter der Braut $\bar{w}$ auf, die durch die Gleichung

$$\bar{w} = 9{,}7 + 0{,}567\, h \tag{5}$$

gegeben ist.

Die analytische Inversion ergibt

$$h = \frac{\bar{w} - 9{,}7}{0{,}567}, \tag{13}$$

eine Gleichung, die gültig ist, weil mit zunehmendem Alter h des Bräutigams auch das mittlere Alter $\bar{w}$ der Braut sich erhöht.

Analytisch nicht umkehrbar wäre demgegenüber die beschreibende statistische Beziehung zwischen dem Alter der Gebärenden und der Wahrscheinlichkeit, an Kindbettfieber zu sterben, da jene Wahrscheinlichkeit mit zunehmendem Alter der Gebärenden sich zuerst verringert und dann ansteigt.

Bei der statistischen Inversion aber betrachtet man nicht nur die Veränderliche, die in der direkten Beziehung als unabhängig gegolten hatte, als Funktion und als unabhängige Variable jene, die in ihr als Funktion betrachtet worden war, sondern man ersetzt auch den statistischen Wert, der in der direkten Beziehung die Funktion darstellte, durch einen Festwert, und man setzt umgekehrt an Stelle des Festwertes, der in der direkten Beziehung durch die unabhängige Variable ausgedrückt war, durch einen statistischen Wert, analog jenem, der in der direkten Beziehung durch die Funktion dargestellt war.

Die statistische Inversion der Gleichung (5) ergibt somit nicht die Gleichung (13), sondern

$$\bar{h} = \frac{w - 9{,}7}{0{,}567}. \tag{6}$$

Wenn wir die Operation, durch welche man den statistischen Wert einer Veränderlichen durch einen Festwert und den Festwert der anderen Veränderlichen durch einen statistischen Wert ersetzt, als «gekreuzte Statistikation» bezeichnen, können wir sagen, dass die statistische Inversion in zwei Operationen besteht: Eine analytische Inversion und eine gekreuzte Statistikation.

Es ist gleichgültig, in welcher Reihenfolge die beiden Operationen ausgeführt werden.

So kann die Gleichung (6) aus der Gleichung (13) durch eine gekreuzte Statistikation abgeleitet werden, oder man kann sie andrerseits erhalten, indem man aus der Gleichung (5) mittelst gekreuzter Statistikation die Gleichung

$$w = 9{,}7 + 0{,}567\, h \tag{14}$$

ermittelt und hiernach diese einer analytischen Inversion unterzieht.

Während — wie wir gesagt haben — die Gleichung (13) gültig ist als Beziehung zwischen dem Alter der Bräutigame und dem mittleren Alter der Bräute, ist es die Gleichung (6) nicht.

Es ist zu sagen, dass die Gleichung (5) wohl analytisch invertibel, jedoch nicht statistisch invertibel ist.

Da die Gleichung (5) eine lineare Beziehung darstellt, ist sie aber — wie wir gezeigt haben — sub-invertibel, d. h. sie bewahrt ihre Gültigkeit als durchschnittliche Beziehung, wenn sie statistisch invertiert ist.

Ähnlich ist die Beziehung zwischen dem Wert $\check{\theta}$ einer Grösse θ und dem Intervall $\check{\theta} \pm k$, in welches der beobachtete Wert t mit einer Wahrscheinlichkeit P_k fällt, analytisch invertibel, soweit das Intervall $\check{\theta} \pm k$ eine monotone Funktion von $\check{\theta}$ ist, so dass man auf den entsprechenden Wert $\check{\theta}$ zurückgehen kann, nachdem wir erkannt haben, dass der beobachtete Wert t mit der Wahrscheinlichkeit P_k in das Intervall $\check{\theta} \pm k$ fällt. Sie ist jedoch nicht statistisch invertibel, da man bei gegebenem Beobachtungswert $\check{t}$ von t nicht mit einer Wahrscheinlichkeit P_k behaupten kann, dass die Grösse θ innerhalb der Grenzen $\check{t} \pm k$ fällt, es sei denn unter besonderen Annahmen.

Hinreichende Hypothesen sind, wie ich anderswo [1] gezeigt habe:

a) dass die Grösse θ a priori mit der gleichen Wahrscheinlichkeit alle die Werte annehme, die zum beobachteten Wert t führen können, und dass die Verteilung der möglichen Werte von t für einen gegebenen Wert $\check{\theta}$ von θ bei sich änderndem $\check{\theta}$ sich nicht ändere; und auch

b) dass der Logarithmus der Grösse θ a priori mit der gleichen Wahrscheinlichkeit alle die Werte annehme, die zum beobachteten Wert t führen können, und dass die Verteilung der Logarithmen der möglichen Werte von t für einen gegebenen Wert $\check{\theta}$ von θ bei sich änderndem $\check{\theta}$ sich nicht ändere.

Unabhängig von diesen oder anderen Annahmen ist die Beziehung nur statistisch sub-invertibel, denn nur für die Totalität aller beobachteten Werte von t wird man stets sagen können, dass die entsprechenden Werte von θ mit der Wahrscheinlichkeit P_k innerhalb der Grenzen $t \pm k$ begriffen sind.

---

[1] Siehe Anmerkungen 1 der Seiten 530 und 531.

Weiter ist die Beziehung zwischen der bekannten Wahrscheinlichkeit p eines Ereignisses und dem Intervall

$$p \pm \gamma \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}},$$

innerhalb welchen die in n Versuchen beobachtete Häufigkeit f mit der Wahrscheinlichkeit P_γ begriffen sei, monoton und daher analytisch invertibel, so dass — wenn bekannt ist, dass die in n Versuchen beobachtete Häufigkeit f eines Ereignisses mit der Wahrscheinlichkeit P_γ in jenes bestimmte Intervall um die unbekannte Wahrscheinlichkeit p jenes Ereignisses fällt — man ihr besagte Wahrscheinlichkeit entnehmen kann. Die Beziehung ist jedoch nicht statistisch invertibel, so dass — wenn die in n Versuchen beobachtete Häufigkeit f eines Ereignisses bekannt ist — es nicht erlaubt ist, zu behaupten, dass die unbekannte Wahrscheinlichkeit p des Ereignisses mit der Wahrscheinlichkeit P_γ innerhalb der entsprechenden Grenzen falle [1]

$$\frac{n}{n+\gamma^2}\left(f + \frac{\gamma^2}{2n} \pm \gamma \sqrt{\frac{f(1-f)}{n} + \frac{\gamma^2}{4n^2}}\right). \tag{15}$$

Die in Betracht kommende Beziehung ist lediglich statistisch sub-invertibel, da besagte Wahrscheinlichkeit P_γ, dass der unbekannte Wert von p zwischen die von der Gleichung (15) gegebenen Grenzen falle, nur für die Totalität aller beobachtbaren Werte (und nicht für die einzelnen beobachteten Werte) von f gilt.

Auch ist nicht immer gebührend zwischen analytischer und statistischer Inversion unterschieden worden, wenn über Probleme der statistischen Inferenz diskutiert wurde [2].

* * *

Es soll auch von einer anderen Form der Inversion gesprochen werden, die analytisch oder statistisch sein kann und die wir als *symmetrische Inversion* bezeichnen wollen.

Die *symmetrische analytische Inversion* (oder kurz, antonomastisch gesagt, *symmetrische Inversion*) erhält man aus der direkten Beziehung durch eine typographische Vertauschung zwischen dem Buchstaben, der die unabhängige Variable bezeichnet, und jenem, der für die Funktion steht.

Sie kann bei allen beschreibenden Beziehungen, funktionalen oder statistischen, ausgeführt werden; sie ist jedoch nur in sehr besonderen Fällen gültig.

---

[1] Diese Formel findet sich bei *H. Cramer*, Mathematical Methods of Statistics. Princeton 1946 S. 515. Nach *Anderson* wurde sie zum erstenmal von Millot im Jahre 1923 verwendet. Vgl. *St. Millot*, Sur la probabilité a posteriori, «Comptes Rendus de l'Académie des Sciences», T. 166, S. 30.

[2] Meine Unterhaltungen mit Dr. Giuseppe Pompilj, Assistent für Geometrie an der Universität in Rom, waren mir sehr nützlich, um die Unterscheidung zwischen statistischer und analytischer Inversion zu klären, wie auch um andere Punkte dieser Arbeit zu präzisieren, und ich möchte Dr. Pompilj an dieser Stelle meinen Dank aussprechen.

Es sei beispielsweise die direkte Beziehung

$$y = k(x - a)$$

als gültig angenommen; dann ergibt die symmetrische Inversion

$$x = k(y - a)\,,$$

die sich für $k = -1$ als gültig erweist.

Die symmetrische Inversion der Gleichung (5) ergibt

$$h = 9{,}7 + 0{,}567\,\bar{w}\,, \tag{16}$$

die verschieden ist sowohl von der Gleichung (13), die mittelst analytischer Inversion erhalten worden ist, als auch von der Gleichung (6), die sich durch statistische Inversion ergeben hat und welcher keine Gültigkeit zukommt.

Wenn man nicht nur eine typographische Vertauschung vornimmt zwischen jenem Buchstaben, der die unabhängige Variable verkörpert, und jenem, der die Funktion darstellt, sondern auch den statistischen Wert, der in der direkten Beziehung für die Funktion steht, durch einen festen Wert ersetzt, und umgekehrt, wenn man den Festwert, der in der direkten Beziehung die unabhängige Variable darstellt, mit einem statistischen Wert vertauscht, führt man eine *symmetrische statistische Inversion* durch.

Die symmetrische statistische Inversion ergibt sich somit aus zwei Operationen: Eine symmetrische Inversion und eine gekreuzte Statistikation, deren Reihenfolge gleichgültig ist. So führt beispielsweise die symmetrische statistische Inversion der Gleichung (5) zu

$$\bar{h} = 9{,}7 + 0{,}567\,w\,, \tag{17}$$

die man erhält, indem man eine symmetrische Inversion der Gleichung (14) ausführt oder eine gekreuzte Statistikation der Gleichung (16). Sie ist nicht gültig; die gültige Beziehung zwischen $\bar{h}$ und w ist, wie wir gesehen haben,

$$\bar{h} = 14{,}5 + 0{,}533\,w\,. \tag{7}$$

Es gibt zwar einzelne Fälle, für welche die symmetrische statistische Inversion zu einer gültigen Beziehung führt.

Ein solcher Fall ist eben die Inversion des Theorems von *Bernoulli*, die durch *Laplace* auf Grund des Theorems von *Bayes* durchgeführt worden ist. Bekanntlich sagt das Theorem von *Bernoulli*, dass die in n Fällen beobachtete Häufigkeit f eines Ereignisses, dem eine Wahrscheinlichkeit p zukommt, mit der Wahrscheinlichkeit P_γ innerhalb der Grenzen

$$p \pm \gamma \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

begriffen sei (direkte Beziehung). Die *Laplace*sche Inversion sagt aus, dass — Gleichwahrscheinlichkeit der Wahrscheinlichkeiten a priori angenommen — die Wahrscheinlichkeit p eines Ereignisses, das in n Beobachtungen die Häufigkeit f aufgewiesen hat, mit der gleichen Wahrscheinlichkeit P_γ innerhalb der Grenzen

$$f \pm \gamma \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}$$

enthalten sei (inverse Beziehung).

Diese Inversion kann als durch zwei Operationen entstanden gedacht werden:

a) Tausch der Buchstaben f und p (symmetrische Inversion);

b) Zuweisung der Wahrscheinlichkeit P_γ dem Werte p, der in der direkten Beziehung fest ist, und demgegenüber Festhaltung des Wertes f, dem man in der direkten Beziehung die Wahrscheinlichkeit P_γ beilegt (gekreuzte Statistikation).

Auch in diesem Falle ist die Formel

$$f \pm \gamma \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}},$$

zu welcher die symmetrische statistische Inversion führt, sehr verschieden von jener (vgl. Gleichung (15)), die aus der gewöhnlichen statistischen Inversion hervorgeht.

Es kann sich jedoch auch ergeben, dass die beiden Inversionen zum selben Ergebnis führen. Dies ist eben der Fall bei der Beziehung zwischen dem Wert $\breve{\theta}$ einer Grösse θ und dem Intervall $\breve{\theta} \pm k$ (k = konstant), in welches der beobachtete Wert t mit der Wahrscheinlichkeit P_k fällt.

* * *

Die beschreibenden statistischen Beziehungen, die sich unter gewissen Bedingungen der symmetrischen statistischen Inversion zugänglich erwiesen haben, sind Beziehungen besonderer Art, die wir als *zusammengesetzte statistische Beziehungen* bezeichnen können, im Gegensatz zu den gewöhnlichen statistischen Beziehungen, die *einzelne statistische Beziehungen* genannt werden sollen.

Die statistische Beziehung, die gültig ist für die einzelnen Werte der Veränderlichen, seien sie positiv oder negativ, wobei stets ihrem Vorzeichen Rechnung getragen wird, bezeichnen wir als einzeln. Andrerseits ist eine statistische Beziehung zusammengesetzt, wenn sie nur für Wertegruppen der Veränderlichen gilt; in der Zusammensetzung sind natürlich Gradunterschiede vorhanden. Der höchste Gradunterschied in der Zusammensetzung findet sich in den durchschnittlichen oder globalen Beziehungen, die nur für die Totalität aller Werte der Veränderlichen gelten.

Eine zusammengesetzte Beziehung ist auch jene, die für Wertepaare der Veränderlichen gilt, welche gleichwertigen aber vorzeichenverschiedenen Abweichungen der wahren Grösse entsprechen. In diesem Sinne ist die Beziehung, die uns sagt, dass der Wert t mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit P_k innerhalb der Grenzen $\check{\theta} \pm k$ begriffen sei, eben zusammengesetzt wie auch jene, die durch das Theorem von *Bernoulli* ausgedrückt ist und aussagt, es bestehe die Wahrscheinlichkeit P_γ, dass in n Beobachtungen die Häufigkeit f eines Ereignisses, dem eine Wahrscheinlichkeit p zukommt, innerhalb der Grenzen

$$p \pm \gamma \sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}}$$

fällt.

Die zusammengesetzten Beziehungen können sich in einzelne Beziehungen aufspalten; insbesondere jene zusammengesetzten Beziehungen, gültig für Wertepaare der Veränderlichen, die grössenmässig gleichen Abweichungen entsprechen, jedoch verschiedenen Vorzeichens sind, können sich in zwei einzelne Beziehungen aufspalten, von welchen die eine für die positiven und die andere für die negativen Abweichungen gilt. So kann sich die vorhergenannte zusammengesetzte Beziehung in zwei einzelne Beziehungen aufspalten: Die eine sagt aus, dass t mit einer Wahrscheinlichkeit P'_k innerhalb der Grenzen $\check{\theta}$ und $\check{\theta} + k$ eingeschlossen sei; der anderen zufolge ist t mit der Wahrscheinlichkeit $P''_k = P_k - P'_k$ zwischen $\check{\theta} - k$ und $\check{\theta}$ begriffen. In ähnlicher Weise lässt sich die durch das Theorem von *Bernoulli* (zweite der oben erwähnten zusammengesetzten Beziehungen) gegebene Wahrscheinlichkeit P_γ trennen in die Wahrscheinlichkeit P'_γ, dass die Häufigkeit f sich innerhalb der Grenzen

$$p + \gamma \sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}}$$

befinde, und in jene $P''_\gamma = P_\gamma - P'_\gamma$, dass die Häufigkeit f innerhalb der Grenzen

$$p - \gamma \sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}}$$

begriffen sei.

Man kann beobachten, dass die zusammengesetzte inverse Beziehung der beiden vorhin betrachteten Fälle, die aus der symmetrischen statistischen Inversion hervorgeht, als die Resultante aus zwei reziproken Beziehungen betrachtet werden kann, die sich nicht eigentlich aus zwei symmetrischen statistischen Inversionen ableiten lassen, die jedoch aus zwei statistischen Inversionen entstanden sind, welche, abgesehen vom Vorzeichen, symmetrisch sind.

Die Wahrscheinlichkeit P_k, dass der beobachtete Wert t einer gegebenen Grösse $\check{\theta}$ zwischen $\check{\theta} + k$ und $\check{\theta} - k$ fällt, kann als die Summe der Wahrscheinlichkeiten P'_k, dass der beobachtete Wert sich innerhalb der Werte $\check{\theta}$ und $\check{\theta} + k$

befinde, und der Wahrscheinlichkeit P_k'', dass besagter beobachteter Wert innerhalb der Grenzen $\check{\theta}$ und $\check{\theta} - k$ begriffen sei, betrachtet werden. Analog kann die aus der symmetrischen statistischen Inversion hervorgehende inverse Wahrscheinlichkeit $\pi_k = P_k$, dass jener Wert der Grösse θ, der zum beobachteten, innerhalb der Grenzen $\check{t} + k$ und $\check{t} - k$ begriffenen Wert $\check{t}$ von t (unter gewissen sich erweisenden Bedingungen) führt, als die Summe der Wahrscheinlichkeit π_k', dass jener Wert von θ innerhalb der Werte $\check{t}$ und $\check{t} + k$ enthalten sei, und der Wahrscheinlichkeit π_k'', dass jener Wert innerhalb der Grenzen $\check{t}$ und $\check{t} - k$ fällt, aufgefasst werden; es sei denn nicht $\pi_k' = P_k'$ und $\pi_k'' = P_k''$ — was zutreffen sollte, wenn die Inversionen, aus welchen sich die Werte π_k' und π_k'' bestimmen lassen, symmetrische statistische Beziehungen wären —, sondern $\pi_k' = P_k''$ und $\pi_k'' = P_k'$.

Ähnliches gilt auch für die symmetrische statistische Inversion des Theorems von *Bernoulli* unter der Hypothese der Gleichwahrscheinlichkeit der Ursachen.

Andrerseits ist es möglich, dass die zusammengesetzte inverse Beziehung genauer ist als die einzelnen Beziehungen, denen sie entstammt, was eben bei der besagten Inversion des Theorems von *Bernoulli* zutrifft.